概率论与数理统计

第七章：参数估计 (parameter estimation)

李立颖 (lily@sustech.edu.cn)

南方科技大学数学系

2023 秋季

内容大纲 I

- 点估计
  - 矩估计
    1. 求总体矩
    2. 样本矩代替总体矩
    3. 求矩估计量
  - 最大似然估计
    1. $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).$
    2. $\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\theta).$
    3. $\frac{d \log L}{d\theta} = 0.$
- 评价标准
  - 无偏性 $\mathbb{E}\hat{\theta} = \theta.$
  - 有效性 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) \leq \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2).$
  - 相合性 $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\right) = 0.$

内容大纲 II

- 区间估计
  - 双侧:
    - 单正态总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right)$ (σ^2 已知), $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)$ (σ^2 未知)
    - σ^2: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$.
  - 双正态总体 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
  - 单侧置信区间.

综述

数理统计问题

如何**选取样本**来**对总体**的种种统计特征**作出判断**.

参数估计问题

知道随机变量 (总体) 的**分布类型**, 但**确切的形式不知道, 根据样本来估计总体的参数**, 这类问题称为**参数估计** (parametric estimation)

参数估计的类型

点估计、区间估计

参数 θ 的估计量

设总体的分布函数为 $F(x;\theta)$ (θ 未知), $X_1,\dots,X_n$ 为样本, 构造一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 来估计参数 θ, 则称 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 为**参数 θ 的估计量.**
将样本观测值 $x_1,\dots,x_n$ 代入 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$, 得到的值 $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$ 称为**参数 θ 的估计值**

点估计 (point estimation))

如果构造一个统计量 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 来作为参数 θ 的估计量, 则称为 **参数 θ 的点估计.**

区间估计 (interval estimation)

如果构造两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)$, $\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)$, 而用 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 来作为参数 θ 可能取值范围的估计, 称为**参数 θ 的区间估计.**

实例

某工厂生产了一大批产品，从中随机抽检了 n 件产品，发现有 k 件次品. 如何估计整批产品的次品率 p?

分析

从该批产品中任取一件，令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{该产品为次品}, \\ 0, & \text{该产品为好品}. \end{cases}$$

则 $X \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ 为总体，按题设，从总体 X 抽取了一个样本 $X_1, \ldots, X_n$. 现要根据抽检结果，对未知参数 p 的大小进行推断.
由大数律有

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{k}{n} \to p, \quad n \to \infty.$$

因此当 n 较大时，$\bar{X}$ 与 p 的“差别”应该较小. 故可用 $\hat{p} = \bar{X}$ 作为 p 的估计.

实例

从某厂生产的一批器件中随机抽取 10 件，测得其寿命值 (小时) 分别为

$$1010,\ 980,\ 975,\ 1050,\ 1100,\ 990,\ 1020,\ 1150,\ 1210,\ 960.$$

试问怎样估计该批器件的平均寿命？

分析

一般地，整批产品寿命 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 按题设，从总体 X 抽取了一个容量为 10 的样本. 现要根据抽检结果，对未知参数 μ 的大小进行推断.

$$\mathbb{E}\bar{X} = \mu, \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

因此，X 与 μ 的 "差别" 应该较小.
故器件的平均寿命估计值为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1044.5.$$

点估计问题的一般提法

设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$, 其中 F 的函数形式为已知, $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 为未知参数, $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本. 若记 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$, 则总体分布可记为 $X \sim F(x;\theta)$.

θ 的取值范围称为**参数空间**, 记为 Θ.

参数空间的例子

- 设总体 $X \sim \pi(\lambda)$, 则参数空间为 $\Theta=\{\lambda \mid \lambda>0\}$.
- 设总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则参数空间为 $\Theta=\{(\mu,\sigma^2) \mid \mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0\}$ (**形参空间**)
- 设某课程的考试成绩总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则参数空间为 $\Theta=\{(\mu,\sigma^2) \mid \mu\in[0,100],\ \sigma\in(0,100)\}$. (**实参空间**)

参数推断问题: F 的函数形式已知, 推断未知参数 θ.

θ 的点估计

构造一个统计量 $\hat\theta(X_1,\ldots,X_n)$, 用统计量观察值 $\hat\theta(x_1,\ldots,x_n)$ 作为未知参数 θ 的估计值. **二重性**: $\hat\theta(X_1,\ldots,X_n)$ 为 θ 的**估计量**, $\hat\theta(x_1,\ldots,x_n)$ 为 θ 的**估计值**.

用 $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 估计 θ 的直观要求

- 估计的**误差**应较小
- 当 n 较大时, 估计的**精度**应较高

对 "误差"、"精度" 不同的解释, 有不同的估计方法.

常用的点估计方法

- 矩估计法 (Method of moments)
- 最大似然估计法 (Maximum likelihood)
- 最小二乘估计 (Least squares)

设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\ldots,\theta_m)$, 其中 $\theta_1,\ldots,\theta_m$ 为未知参数, $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本. 设下列总体矩 $\alpha_k = \mathbb{E}X^k$, $k=1,2,\ldots,m$ 都存在.

由大数律 $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \to \mathbb{E}X^k = \alpha_k$. 因此

$$A_k \approx \alpha_k = \mathbb{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x;\theta_1,\ldots,\theta_m) := \alpha_k(\theta_1,\ldots,\theta_m).$$

求解方程组

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1,\ldots,\theta_m) = A_1, \\ \alpha_2(\theta_1,\ldots,\theta_m) = A_2, \\ \quad\cdots \\ \alpha_m(\theta_1,\ldots,\theta_m) = A_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat\theta_1 = \hat\theta_1(A_1,\ldots,A_m), \\ \hat\theta_2 = \hat\theta_2(A_1,\ldots,A_m), \\ \cdots \\ \hat\theta_m = \hat\theta_m(A_1,\ldots,A_m). \end{cases}$$

称 $(\hat\theta_1,\ldots,\hat\theta_m)$ 为 $(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ 的**矩估计量 (矩估计)**.

上面的 $=$ 号其实是 $\approx$! 我们这里做了一个近似.

例: 均匀分布

设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布, a,b 未知. $X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本. 试求 a,b 的矩估计量.

解

由

$$\begin{cases} \mu_1 = \mathbb{E}X = \dfrac{a+b}{2}, \\ \mu_2 = \mathbb{E}X^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12} + \dfrac{(a+b)^2}{4}, \end{cases}$$

解得 $a = \mu_1 - \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$, $b = \mu_1 + \sqrt{3(\mu_2-\mu_1^2)}$.
分别以 A_1, A_2 代替 μ_1,μ_2, 得到 a,b 的矩估计量分别为

$$\hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2-A_1^2)} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2},$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2-A_1^2)} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}.$$

例: 均值与方差

设总体 X 的均值 $\mu = \mathbb{E}X$, 方差 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ 都存在. $X_1, \ldots, X_n$ 为总体样本, 求未知参数 μ, σ^2 的矩估计.

解

由

$$\begin{cases} \mu_1 = \mathbb{E}X = \mu, \\ \mu_2 = \mathbb{E}X^2 = \mu^2 + \sigma^2. \end{cases}$$

得矩估计

$$\hat{\mu} = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2 := \tilde{S}^2.$$

称 $\hat{S}^2$ 为**修正的样本方差**.

当 X 服从正态分布时, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ 服从什么分布?

例题

设总体有均值 μ 与方差 σ^2, 今有样本观察值

$$-1.20,\ 0.82,\ 0.12,\ 0.45,\ -0.85,\ -0.30.$$

求 μ 与 σ^2 的矩估计值.

解

$$\hat{\mu} = -0.16, \quad \hat{\sigma}^2 \approx 0.5.$$

例: 泊松分布

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为总体 $X \sim \pi(\lambda)$, $\lambda > 0$ 的样本. 求未知参数 λ 的矩估计.

总体一阶矩和样本一阶矩分别为 $\mathbb{E}X = \lambda, \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 因此 λ 的矩估计为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

例: 指数分布

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为总体 $X \sim \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{x>0}$, $\theta > 0$ 的样本. 求未知参数 θ 的矩估计.

总体一阶矩和样本一阶矩分别为 $\mathbb{E}X = \theta$, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 令 $\bar{X} = \theta$, 求得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \bar{X}$.

样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 $\mu := \mathbb{E}X$ 的矩估计.

例

设有一批灯管，其寿命为 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 从中随机抽取 11 只，其寿命数据为

$$110, 184, 145, 122, 165, 143, 78, 129, 62, 130, 168.$$

用矩估计法估计 λ 的值.

解

由 $\mu_1 = \mathbb{E}X = \dfrac{1}{\lambda}$, 得 $\lambda = \dfrac{1}{\mu_1}$. 用 $A_1 = \bar{X}$ 代替 μ_1, 得参数 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{X}}$, 而

$$\bar{X} = \frac{110 + 184 + 145 + 122 + 165 + 143 + 78 + 129 + 62 + 130 + 168}{11} \approx 130.55.$$

故 $\hat{\lambda} = 1/130.55 \approx 0.0077$.

例

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 $X \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ 的样本, $p \in (0,1)$. 求未知参数 p 的矩估计.

解

总体一阶矩为 $\mathbb{E}X = mp$, 样本一阶矩为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 令 $mp = \bar{X}$, 求得 p 的矩估计为

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}.$$

小结

不管总体 X 服从何种分布，总体期望和方差的矩估计量分别为样本平均和样本 2 阶中心距:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

约定

若 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的矩估计，则 $g(\theta)$ 的矩估计为 $g(\hat{\theta})$.

最大似然思想

实际问题

有两个射手，一人的命中率为 0.9，另一人的命中率为 0.1，现在他们中的一个向目标射击了一发，结果命中了，估计是谁射击的？

最大似然思想

一般说，事件 A 发生的概率与参数 $\theta \in \Theta$ 有关，θ 取值不同，则 $\mathsf{P}(A)$ 也不同. 因而应记事件 A 发生的概率为 $\mathsf{P}(A \mid \theta)$. 若 A 发生了，则认为此时的 θ 值应是在 Θ 中使 $\mathsf{P}(A \mid \theta)$ 达到最大的那一个. 这就是**最大似然思想**.

Fisher 的最大似然思想

一个随机试验有很多可能结果，如果在一次试验中，某结果发生了，则认为该结果 (事件) 发生的可能性最大.

例

老战士与一新同学一同进行射击训练，每人打了一枪，结果有一枪中靶. 试问这一枪是谁打中的？

分析

按照 Fisher 的最大似然思想，应该认为是老战士打中的较合理.

例

一袋中有红、白两颜色的球若干，只知道两种球的比例为 4:1，但不知道哪种颜色的球占多. 现从中任取一球，结果为白色. 问袋中哪种颜色的球较多？

分析

按照 Fisher 的最大似然思想，应该认为袋中白球较多.

离散型随机变量模型

设总体 X 为离散型随机变量，它的分布律为

$$\mathsf{P}(X=x)=p(x;\theta), \quad \theta\in\Theta.$$

现有样本观察值 $x_1,\ldots,x_n$.

最大似然估计

考虑样本的**似然函数**

$$L(\theta)=\mathsf{P}(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta).$$

求得 $L(\theta)$ 的最大值点 $\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$，称为 θ 的**最大似然估计值**，称 $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 为 θ 的**最大似然估计量**.

连续型情形

用密度函数代替 $p(x;\theta)$.

最大似然估计

设 $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim f(x;\theta)$ 的样本 (f 为频率函数或密度函数). 令

$$L(\theta) = L(\theta; X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta),$$

称 $L(\theta)$ 为**似然函数**. 若存在统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta; X_1, \ldots, X_n),$$

则称 $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 为 θ 的**最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimation, MLE)**, 称 $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 为**最大似然估计值**.

最大似然估计法的一般步骤

(1) 构造似然函数 $L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$. p : 频率函数或密度函数.

(2) 取自然对数: $\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln p(x_i;\theta)$.

(3) 令 $\dfrac{d \log L}{d\theta} = 0$ 求最大值.

例: 两点分布

设 $X \sim \mathrm{Bin}(1,p)$. $X_1,\ldots,X_n$ 是来自 X 的一个样本. 试求参数 p 的最大似然估计量.

解

设 $x_1,\ldots,x_n$ 是对应于 $X_1,\ldots,X_n$ 的一个样本值. 因为 X 的分布律是 $\mathsf{P}(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$, 所以似然函数及对数似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \quad \log L(p)=\ln p\cdot\sum_{i=1}^n x_i+(n-\sum_{i=1}^n x_i)\ln(1-p).$$

由

$$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-p}=0,$$

得最大似然估计值及最大似然估计量为

$$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar{x}, \quad \hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X},$$

例：指数分布

设总体服从指数分布 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\cdot\mathbb{1}_{\{x>0\}}$. $X_1,\dots,X_n$ 是来自于总体的样本，求 θ 的最大似然估计.

解

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{X_i}{\theta}}=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i}.$$

由对数似然方程

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{n\bar{X}}{\theta^2}=0$$

得 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\bar{X}$.

例: 正态分布

设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 为未知参数, $x_1, \ldots, x_n$ 是样本 X 的一个样本值. 求 μ, σ^2 的最大似然估计值.

解

X 的概率密度为 $f(x;\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. 则似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}.$$

对数似然函数为 $\ln L = -\dfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \dfrac{n}{2}\ln\sigma^2 - \dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$. 解对数似然方程得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L = \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i - n\mu\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2. \end{cases}$$

例: 均匀分布

设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自均匀分布总体 $X \sim \mathrm{U}[a, b]$, $a < b$ 的样本. 求参数 a, b 的最大似然估计.

解

似然函数为

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}, \quad a \le X_{\min}, X_{\max} \le b.$$

显然, 对于任意满足上述条件的 a, b, 有

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(X_{\max} - X_{\min})^n}.$$

因此 a, b 的最大似然估计就是 $\hat{a} = \min\limits_{1 \le i \le n} X_i, \hat{b} = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i$.

例题

设 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}$$

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是样本，求 θ 的极大似然估计量.

解

似然函数及对数似然函数为

$$L(\theta)=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},\quad \ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

求解对数似然方程得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

因此 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right]^2}$.

参数点估计

矩估计三步法

1. 求总体矩.
2. 样本矩代替总体矩.
3. 求出矩估计量 (矩估计值) .

最大似然估计法三步法

1. 求 (对数) 似然函数.
2. 列出 (对数) 似然方程组.
3. 求 (对数) 似然函数的最大值点.

作业

- P218: 5 (a) (b) (c)
- 补充题
  1. 设总体 X 具有密度函数
  $$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$
  $X_1,\ldots,X_n$ 是样本，求 θ 的矩估计.
  2. 设总体 X 的密度函数 (或频率函数) 如下，$X_1,\ldots,X_n$ 为样本，求下列情况下 θ 的最大似然估计.
     (1) $p(x;\theta)=\dfrac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$, $x=0,1,2,\ldots$ $(\theta>0)$.
     (2) $f(x;\theta)=\theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^{\alpha}}$, $x>0$ (α 已知).
  3. 设总体 X 具有密度函数
  $$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta(1-x)^{\theta-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$
  $X_1,\ldots,X_n$ 是其样本. 求 θ 的矩估计及最大似然估计.

1. 点估计 (Point estimation)
2. 估计量的评价标准
   - 引言
   - 无偏性
   - 有效性
   - 相合性 (一致性)
   - 作业
3. 区间估计 (Interval estimation)

例

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为均匀分布总体 $X\sim \mathrm{U}(a,b)$ 的样本，按矩估计法，求得 a,b 的点估计分别为

$$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3}\tilde{S},\quad \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3}\tilde{S}.$$

按最大似然估计法，求得 a,b 的点估计分别为

$$\hat{a}=\min_{1\le i\le n} X_i,\quad \hat{b}=\max_{1\le i\le n} X_i.$$

例

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自 Poisson 分布总体 $X\sim\pi(\lambda)$ 样本，因为

$$\mathbb{E}X=\mathrm{Var}(X)=\lambda,$$

所以 $\hat{\lambda}_1=\bar{X}$，$\hat{\lambda}_2=\tilde{S}^2$ 都可以作为未知参数 λ 的矩估计.

问题

用什么标准来评价和选择同一参数的不同的点估计量？**无偏性，有效性，相合性**

设总体 $X \sim F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, Θ 为参数空间. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 为总体 X 的样本, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 为未知参数 θ 的点估计.
$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ **也是一个随机变量，会在真值附近“波动”**.

定义

若估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 的数学期望存在, 且 $\forall \theta \in \Theta$ 有

$$\mathbb{E}_\theta \hat{\theta} = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计**, 否则称**有偏估计**.

称 $b_n(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta \hat{\theta} - \theta$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的**偏差 (偏)**.

- $b_n(\hat{\theta}) \neq 0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**有偏估计**.
- 若 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n(\hat{\theta}) = 0$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**渐近无偏估计**.

期望和方差

例

无论 X 服从什么分布，若 $\mu := \mathbb{E}X$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X)$ 都存在，则 $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = S^2$ 分别是 μ, σ^2 的无偏估计.

证明

我们有

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu,$$

$$\mathbb{E}\hat{\sigma}^2 = \mathbb{E}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2, \quad \mathbb{E}\tilde{S}^2 = \frac{n-1}{n}\mathbb{E}S^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \to \sigma^2.$$

因此修正样本方差 $\hat{S}^2$ 是 σ^2 的**渐近无偏估计**.

正态分布的方差和期望估计

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则 μ 的矩估计和最大似然估计 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，而 σ^2 的矩估计和最大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

是 σ^2 的有偏估计或渐近无偏估计.

σ^2 的无偏估计是

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

例

设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = \mathbb{E}X^k$, $k \geq 1$ 存在, 又设 $X_1, \ldots, X_n$ 是 X 的一个样本. 试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计量.

证明

$X_1, \ldots, X_n$ 与 X 同分布, 因此

$$\mathbb{E}X_i^k = \mathbb{E}X^k = \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

由期望的线性性, 有

$$\mathbb{E}A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^k = \mu_k.$$

例题

设 $X_1,\dots,X_n$ 为总体 $X\sim \mathrm{U}(0,\theta)$ 的样本，试讨论 θ 的矩估计 $\hat\theta_M$ 和最大似然估计 $\hat\theta_L$ 的无偏性.

解

由 $\mathbb{E}X=\dfrac{\theta}{2}$，令 $\bar X=\dfrac{\theta}{2}$，得 θ 的矩估计为 $\hat\theta_M=2\bar X$. 于是

$$\mathbb{E}\hat\theta_M=2\mathbb{E}\bar X=2\mathbb{E}X=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta,$$

因此 $\hat\theta_M$ 是 θ 的无偏估计.

θ 的最大似然估计是 $\hat\theta_L=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$，其密度函数为

$f_{\max}(z)=nf(z)[F(z)]^{n-1}=\dfrac{n}{\theta}\cdot\left(\dfrac{z}{\theta}\right)^{n-1}$，$0<z<\theta$. 因此

$$\mathbb{E}\hat\theta_L=\int_0^\theta z\cdot\frac{n}{\theta}\cdot\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}dz=\frac{n}{n+1}\theta<\theta.$$

所以 $\hat\theta_L=X_{(n))}$ 是 θ 的有偏估计 (渐近无偏估计). 经修正后

$\hat\theta=\dfrac{n+1}{n}\hat\theta_L=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是 θ 的无偏估计.

例

设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$ 为未知，又设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本，试证 $\bar{X}$ 和 $nZ=n\min(X_1,\dots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量.

证

因为 $\mathbb{E}\bar{X}=\mathbb{E}X=\theta$，所以 $\bar{X}=\theta$ 的无偏估计量. 而 $Z=\min(X_1,\dots,X_n)$ 具有概率密度

$$f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-nx/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

故知 $\mathbb{E}Z=\dfrac{\theta}{n}$，$\mathbb{E}(nZ)=\theta$. 即 nZ 也是参数 θ 的无偏估计量.

无偏性的实际意义

- 在工程技术中：称 $\mathbb{E}\hat{\theta}-\theta$ 为系统误差.
- 在经济活动中：无偏性反映了商业行为的公平性.
- 在竞技评分中：无偏性反映了评分的公正性

问题

在什么情况下，无偏性才有意义？

无偏性只有在大量试验的情况下才有意义.

例

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为总体 $X\sim\pi(\lambda)$ 的样本

$$\mathbb{E}X=\mathrm{Var}(X)=\lambda,\quad \mathbb{E}\bar{X}=\lambda,\quad \mathbb{E}S^2=\mathrm{Var}(X)=\lambda,$$

故 $\hat{\lambda}_1=\bar{X}$, $\hat{\lambda}_2=S^2$ 都是 λ 的无偏估计.
更进一步, 对任意常数 c, 统计量

$$\hat{\lambda}=c\hat{\lambda}_1+(1-c)\hat{\lambda}_2=c\bar{X}+(1-c)S^2$$

都是 λ 的无偏估计.

定义

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是总体 $X\sim F(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ 的样本. 假设 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计. 即 $\mathbb{E}_\theta\hat{\theta}_1=\mathbb{E}_\theta\hat{\theta}_2=\theta$, $\theta\in\Theta$. 若对任意 $\theta\in\Theta$ 有 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)\le\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$, 则称$\hat{\theta}_1$ **较** $\hat{\theta}_2$ **有效**.

例子

设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$ 未知. 又设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自于 X 的样本，则 $\bar{X}$ 和 $nZ=n\min(X_1,\ldots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量. 试证 $n>1$ 时，$\bar{X}$ 比 nZ 有效.

证明

由于 $\mathrm{Var}(X)=\theta^2$，故有 $\mathrm{Var}(\bar{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$. 再者，由于 $\mathrm{Var}(Z)=\dfrac{\theta^2}{n^2}$，$\mathrm{Var}(nZ)=\theta^2$. 当 $n>1$ 时，$\mathrm{Var}(\bar{X})<\mathrm{Var}(nZ)$，故 $\bar{X}$ 比 nZ 有效.

例子

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为总体 $X \sim \mathrm{U}(0, \theta)$ $(\theta > 0)$ 的样本. 试讨论的两个无偏估计 $\hat{\theta}_M = 2\bar{X}$, $\hat{\theta} = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$ 的有效性.

解

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_M) = 4 \cdot \mathrm{Var}_\theta(\bar{X}) = 4 \cdot \frac{\mathrm{Var}_\theta(X)}{n} = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \mathrm{Var}_\theta(X_{(n)}) \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \int_0^\theta \left(z - \frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \frac{n}{\theta} \left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{\theta^2}{n(n+2)}. \end{aligned}$$

当 $n > 1$ 时, $\forall \theta > 0$ 有 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) < \mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_M)$, 故 $\hat{\theta}$ 较 $\hat{\theta}_M$ 有效.

问题

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计. 当 n 增加时, 怎样评价 $\hat{\theta}$ 是一个 "好" 的估计?

分析

当样本容量 n 增加时, 样本 $X_1, \ldots, X_n$ 包含未知参数 θ 的信息也越多, 此时估计应越 "精确".

问题

由于 $\hat{\theta}$ 是随机变量, 怎样描述估计的精确性?

(弱) 相合性

设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计. 若 $\forall \theta \in \Theta$ 满足

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathsf{P}_\theta} \theta,\ n \to \infty, \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0,\ \forall \varepsilon > 0,$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的 **(弱) 相合估计**.

例

无论总体 X 服从什么分布，若 $\mu := \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ 都存在，则 $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = S^2$ 分别是 μ, σ^2 的相合估计.

证

由 (辛钦) 大数律知,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu, \quad n \to \infty.$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right] \\ &\xrightarrow{\mathsf{P}} \mathbb{E}X^2 - \mu^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

关于相合估计的一般结论

- 由辛钦大数定律知, θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 是相合估计.
- θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$ 一般也是相合估计
- θ 的相合估计不一定是无偏估计, 例如 $\hat{S}^2 = \dfrac{n-1}{n} S^2$.
- 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 则由切比雪夫不等式有

$$\mathsf{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\hat{\theta}) = 0$ 时, $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计 (充分条件).

例题

设 $X_1,\dots,X_n$ 是总体 $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $p\in(0,1)$ 的样本. 求未知参数 p 的最大似然估计 $\hat p$, 并验证 $\hat p$ 是无偏估计与相合估计.

解

似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=\left[\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}\right]\cdot p^{n\bar X}(1-p)^{mn-n\bar X}.$$

求解似然方程得

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p}=\frac{n\bar X}{p}-\frac{mn-n\bar X}{1-p}=0 \quad\Rightarrow\quad \hat p=\frac{\bar X}{m}.$$

我们有 $\hat p$ 是 p 的无偏与相合估计, 因为

$$\mathbb{E}\hat p=\frac{\mathbb{E}\bar X}{m}=\frac{mp}{m}=p$$

$$\hat p=\frac{\bar X}{m}\xrightarrow{\mathsf{P}}\frac{mp}{p},\quad n\to\infty.$$

1. 设总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$ 为样本, 试求 k 使得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

为 σ^2 的无偏估计.

2. 设从均值 μ, 方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本. $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 分别为两样本的均值.
试证: 对于任意的 $a + b = 1$, $Y = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计, 并确定常数 a, b 使得 $\mathrm{Var}(Y)$ 最小.

3. 设总体 X 服从参数为 $1/\theta$ 的指数分布, 即概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

这里 $\theta > 0$ 是参数.
(1) 证明: $\bar{X}$ 和 $n \cdot \min(X_1, \ldots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计.
(2) 比较两个随机变量的有效性.

回顾

χ^2-分布

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自于总体 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 的样本，令

$$\chi^2 = X_1^1 + X_2^2 + \cdots + X_n^2,$$

则称 χ^2 服从**自由度为 n 的 χ^2-分布**，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

t-分布

设 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立. 令 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$, 称 T 服从**自由度为 n 的 t-分布**，记为 $T \sim t(n)$.

F-分布

设 $U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 相互独立，令 $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2}$, 称 F 服从**自由度为 (n_1, n_2) 的 F-分布**，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

抽样定理回顾 I

定理一

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

定理二 (Fisher 引理)

设 $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$, S^2 分别为样本均值和样本方差，则

- $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,
- $\bar{X}$, S^2 相互独立.

定理三

设 $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本. $\bar{X}$, S^2 分别为样本均值和样本方差，则

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

抽样定理回顾 II

定理四

设 $X_1, \ldots, X_{n_1}$ 是总体 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 是总体 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 且两样本相互独立. 记两样本方差分别为 S_1^2, S_2^2, 则

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

定理五

设 $X_1, \ldots, X_{n_1}$ 是总体 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 是总体 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 且两样本相互独立. 记两样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$, 则

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_\omega = \sqrt{S_\omega^2}$.

点估计的局限性

思考

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计.

- 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ 的精度有多高?
- 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ 的可信度有多高?
- 未知参数 θ 落在什么范围内?

可见估计未知参数的范围比未知参数的点估计更有应用价值

估计未知参数范围的实例

- 对目标位置、经济数据等预测: 给出一个预测范围
- 天气预报中对明天气温的估计: 最低气温与最高气温
- 工程中对钢材或水泥用量估计: 100 吨至 110 吨之间
- 破案时对犯罪嫌疑人身高估计: 165 cm – 170 cm.

点估计方法的局限 II

问题

怎样估计未知参数的范围?

分析

设有两个统计量 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ 满足 $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, 若

$$\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2),$$

则随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 可作为未知参数 θ 的 "范围估计".

特点

- $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 小, 则估计精度高、可信度低
- $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 大, 则可信度高、估计精度低

问题

如何平衡估计精度与可信度?

置信区间

定义

设总体 $X \sim F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$. 对任意 $\alpha \in (0,1)$, 若存在两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$, $\underline{\theta} \le \bar{\theta}$ 使得对于任意 $\theta \in \Theta$ 有

$$\mathsf{P}_\theta(\underline{\theta} \le \theta \le \bar{\theta}) \ge 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的**置信水平**为 $1-\alpha$ 的**置信区间**, $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ 分别称为**置信下限**和**置信上限**.

注

- 置信水平也称为置信度, 通常 α 较小, $1-\alpha$ 较大.
- 对于连续型总体, 则取 $\mathsf{P}(\underline{\theta} \le \theta \le \bar{\theta}) = 1-\alpha$.
- 对于离散型总体, 则取 $\mathsf{P}(\underline{\theta} \le \theta \le \bar{\theta})$ 尽可能接近 $1-\alpha$.
- 现今的区间估计理论是由原籍波兰的美国统计学家奈曼 (J.Neyman) 于 20 世纪 30 年代建立起来的.
- 求区间估计一般方法: 依据**波动理论**的**枢轴变量法**.

例

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自于总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ 的样本, 试求未知参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

分析

μ 的置信区间 $\Leftrightarrow$ μ 所在的 "范围".
由最大似然思想:μ 看似 "最像" $\bar{\mu}$, 由无偏估计理论: $\bar{X}$ 应在 μ 附近 "波动".
因此, μ 所在范围应该是以 $\bar{X}$ 为中心的 "随机区间".

解

μ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间应满足

$$\mathsf{P}(\bar{X} - c < \mu < \bar{X} + c) = 1 - \alpha,$$

其中 α 为待定常数. 注意到**枢轴量** $\dfrac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, 因此

$$\mathsf{P}(\sqrt{n}|\bar{X} - \mu| < u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}\Big(\mu \in (\bar{X} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}})\Big) = 1 - \alpha.$$

如何理解“置信度”与“置信区间”?

取 $n = 16$, $\alpha = 0.05$, 则 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$, 于是 μ 的置信水平为 0.95 的一个置信区间为

$$(\bar{X} - 0.49, \bar{X} + 0.49).$$

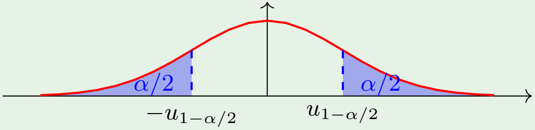
问题

- $(\bar{X} - 0.49, \bar{X} + 0.49)$ 是否一定包含真值 μ?
- 置信度 $1 - \alpha = 0.95$ 的实际含意是什么?

以上分析的可信度为 $1 - \alpha = 95\%$, 即若反复抽样 100 次, 则包含真值 μ 的区间 $(\bar{X} - 0.49, \bar{X} + 0.49)$ 约有 95 个, 不包含 μ 的区间大约只有 5 个.

置信区间的估计精度问题

由枢轴法，μ 的置信区间满足 $\mathrm{P}\left(\bar{X}-\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha.$



置信区间不唯一！ 我们也可以选择

$$\mathrm{P}\left(\bar{X}-\frac{u_{1-3\alpha/4}}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\frac{u_{1-\alpha/4}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha.$$

区间长度长，则估计精度低，区间长度短，则估计精度高.

怎样选择置信区间

在保证置信水平不变的条件下，尽可能缩短置信区间的长度，从而提高估计精度.
通常采用**“两边面积相等”**原则确定分位点

例

设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自于总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 试求未知参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间. **(注意 σ^2 未知!)**

解

$\bar{X}$ 是 μ 的最大似然估计和无偏估计, 且 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 我们把它作为枢轴量, 因此 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间由下式确定

$$\mathsf{P}\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) := \left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right).$$

求未知参数置信区间的一般过程

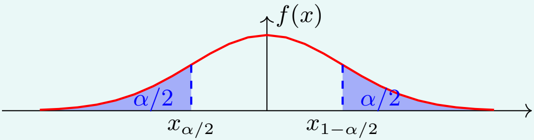
设 θ 是待估计的未知参数，φ 是其它的未知参数

- 求出 θ, φ 的较好的点估计.
- 构造样本函数/枢轴量 (一般运用抽样分布定理)

$$T = T(\hat{\theta}, \theta, \hat{\varphi}) \sim f(x).$$

- 对于给定的置信水平 $1-\alpha$ 由 $f(x)$ 确定两个分位点 $x_{1-\alpha/2}, x_{\alpha/2}$ 使得

$$\mathsf{P}\left(x_{\alpha/2} < T(\theta, \hat{\theta}, \hat{\varphi}) < x_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$



或等价地，$\mathsf{P}(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = 1-\alpha$.

- θ 的置信区间为 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

例题

用雷达测得匀速飞行的巡航导弹 5 个速度数据，

$$750,\ 775,\ 765,\ 745,\ 760 \quad (\mathrm{m/s}).$$

设雷达速度测量值 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，且雷达没有系统误差. 求巡航导弹飞行速度的置信区间，$\alpha = 0.05$.

解

由枢轴法可求得 μ 的 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right).$$

由 $n = 5$，$\alpha = 0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.7765$，$\bar{x} = 759$，$s = 11.94$，
$\dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{0.975(4)} = 14.83$.
故巡航导弹飞行速度 μ 的 95% 置信度的置信区间是

$$(\bar{x} - 14.83, \bar{x} + 14.83) = (744.17, 773.83).$$

例题

设 $X_1,\dots,X_n$ 为总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的样本, μ,σ^2 均未知. 求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

分析

S^2 是 σ^2 一个具有良好性质的估计:

- S^2 是 σ^2 的无偏估计 (最小方差无偏估计)
- S^2/σ^2 在常数 1 附近波动, $\Rightarrow (n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ 在常数 $(n-1)$ 附近波动.

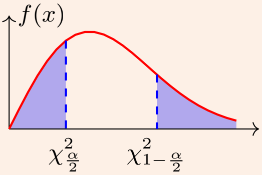
解

取 $(n-1)S^2/\sigma^2$ 作为枢轴量, 我们有

$$\mathsf{P}\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha.$$

故 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right).$$



例

例有一大批糖果. 现从中随机地取 16 袋, 称得重量 (以克计) 如下

$$508,\ 499,\ 503,\ 504,\ 510,\ 497,\ 512,$$
$$505,\ 493,\ 496,\ 506,\ 502,\ 509,\ 496.$$

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布, 试求总体标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解

按已知有 $\alpha/2 = 0.025$, $1-\alpha/2 = 0.975$, $n-1 = 15$, $s = 6.2022$. 查表得 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.488$, $\chi^2_{0.975}(15) = 6.262$. 于是

$$\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = 4.58, \quad \frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = 9.60.$$

所以标准差 σ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为 $(4.58, 9.60)$.

小结

单正态总体均值和方差的均值估计

假设置信水平为 $1-\alpha$.

- 方差已知, 对均值的区间估计

$$\left(\bar{X} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

- 方差未知, 对均值的区间估计

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)\right).$$

- 均值未知, 对方差的区间估计

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right).$$

问题背景

设研究对象的某指标 $X \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$.
如果外界条件发生了变化，则要研究外界条件的变化，是否对该指标产生了影响.
工艺改变、原料不同、设备变化、人员变更.

分析

设变化前指标 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$，变化后指标 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. 若外界条件的变化对指标产生影响，则应反映在下述参数的改变上:

$$\mu_1 - \mu_2, \quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

故有必要求 $\mu_1 - \mu_2$, $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计.

例

设 $X_1,\ldots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1,\ldots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本, 两样本独立, σ_1^2, σ_2^2 为已知. 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解

$\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的最大似然估计和无偏估计, 由题设条件有,

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim\mathcal{N}(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}) \quad\Rightarrow\quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim\mathcal{N}(0,1).$$

因此, $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

例

设 $X_1,\ldots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本, $Y_1,\ldots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本, 两样本独立, μ_1,μ_2,σ^2 为未知. 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

分析

$\bar{X}$, $\bar{Y}$ 分别是 μ_1,μ_2 的最大似然估计和无偏估计.

$$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_1+n_2-2}.$$

是 σ^2 的无偏估计.

解

因为 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$. 故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

例

为提高某一化学生产过程的得率，采用一种新的催化剂．为慎重起见，在实验工厂先进行试验．设采用原来的催化剂进行了 $n=8$ 次试验，又采用新的催化剂进行了 $m=8$ 次试验，分别得到得率的平均值 $\bar{x}_1=91.73$, $\bar{x}_2=93.75$，样本方差 $s_1^2=3.89, s_2^2=4.03$．假设两总体都服从正态分布，且方差相等，两样本独立．试求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间．

解

已知 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{\alpha/2}(n+m-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right).$$

由于 $1-\alpha=0.95$, $\alpha/2=0.025$, $n=8$, $m=8$, $n+m-2=14$, $t_{0.025}(14)=2.1448$, $s_\omega^2=(7\times 3.89+7\times 4.02)/14=3.96$, $s_\omega=1.9887$．所以两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间是

$$\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{0.025}(n+m-2)s_\omega\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right)=(-2.02\pm 2.13)=(-4.15,0.11).$$

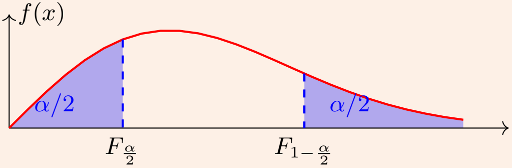
例

设 $X_1,\ldots,X_{n_1}$ 为来自正态总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1,\ldots,Y_{n_2}$ 为来自正态总体 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本, 两样本独立. μ_1,μ_2,σ_1^2, σ_2^2 均未知. 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解

S_1^2, S_2^2 分别是 σ_1^2,σ_2^2 的无偏估计, 由题设条件及抽样分布定理有

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$



故 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例

研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子 18 只，抽取机器 B 生产的管子 13 只，测得样本方差分别为 $s_1^2 = 0.34(\mathrm{mm}^2)$ $s_2^2 = 0.29(\mathrm{mm}^2)$ 设两样本相互独立，且设由机器 A、机器 B 生产的管子的内径分别服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$，这里 μ_i, σ_i^2, $i = 1, 2$，均未知．试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的一个置信水平为 0.90 的置信区间．

解

在下式中取 $n = 18$, $s_1^2 = 0.34$, $m = 13$, $s_2^2 = 0.29$, $\alpha = 10$

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)}\right).$$

查表得 $F_{\alpha/2}(n-1, m-1) = 2.59$, $F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1) = \dfrac{1}{2.38}$．于是

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{0.34}{0.29} \times \frac{1}{2.59} = 0.45, \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)} = \frac{0.34}{0.29} \times 2.38 =$$

所以 σ_1^2/σ_2^2 的一个置信水平为 0.90 的置信区间为 $(0.49, 2.79)$.

指标的分类

- 寿命、收入、生产率、射击命中率等越大越好
- 次品率、杂质含量、事故次数等越小越好

定义

$\forall 0<\alpha<1$, 若存在统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 满足 $\forall\theta\in\Theta$, 有

$$\mathsf{P}(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha,$$

则称 $(\underline{\theta},\infty)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间** 称 $\underline{\theta}$ 为**单侧置信下限**.
若存在统计量 $\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 满足 $\forall\theta\in\Theta$, 有

$$\mathsf{P}(\theta<\bar{\theta})=1-\alpha,$$

则称 $(-\infty,\bar{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间** 称 $\bar{\theta}$ 为**单侧置信上限**.

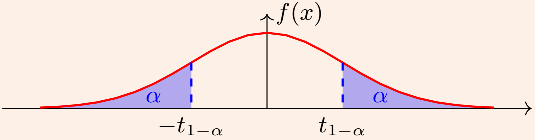
例

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为总体 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知. 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

解

$\bar{X}$, S^2 分别是 μ, σ^2 的无偏估计, 且

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1) \quad\Rightarrow\quad \mu=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t(n-1).$$



故 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 $\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)$.

单侧置信上限: $\bar{\mu}=\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)$.

例

从一批电子元件中随机取 5 个进行寿命试验，测得寿命数据 (单位：小时) 如下

$$1050,\ 1100,\ 1130,\ 1250,\ 1280.$$

设寿命 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，试求 μ 的置信水平为 95% 单侧置信下限.

解

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1).$$

由题给数据，算得 $\bar{x} = 1160, s^2 = 9950$，$n = 5, 1-\alpha = 0.95$，$t_{0.95}(4) = 2.1318$. 故 μ 的置信水平为 95% 的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = 1160 - \frac{\sqrt{9950}}{\sqrt{5}} \times 2.1318 = 1065.$$

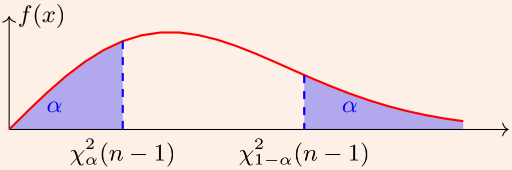
例

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ^2 均未知. 求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信限.

解

S^2 是 σ^2 的无偏估计, 且

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 \sim \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1)}.$$



故 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下、上限分别为

$$\underline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}.$$

大样本下非正态总体参数的区间估计

例

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 且 $\mathbb{E}X = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ 均存在, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解

由中心极限定理, 当 n 充分大时有

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

若 σ^2 未知, 因 $S^2 \to \sigma^2$, $n \to \infty$, 则有

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

从而求得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为 $\left(X \pm \frac{S}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

注: 上述置信区间的近似程度不仅取决于 n 的大小, 还取决于总体的分布.

例

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim \mathrm{Bin}(1, p)$ 的样本，求未知参数 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解

$\mathbb{E}X = p$. 于是由前面的近似结果，当 n 充分大时，p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

注

我们也可以用

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

反解出 p. 但此时 p 的方程较为复杂.

区间估计: 小结

- 区间估计的背景、概念、估计精度.
- 求解区间估计的一般过程: 基于波动理论的枢轴变量法及直观求解.

- 单正态总体的未知参数区间估计 (三类)
- 双正态总体的未知参数区间估计 (三类)
- 单侧置信区间

几点说明

- 参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 (θ_1, θ_2) 表示该区间有 $100(1-\alpha)\%$ 的可能性包含总体参数 θ 的真值.
- 不同的置信水平, 参数 θ 的置信区间不同.
- 置信区间越小, 估计越精确, 但置信水平会降低; 相反, 置信水平越大, 估计越可靠, 但精确度会降低, 置信区间会较长. 一般: 对于固定的样本容量, 不能同时做到精确度高 (置信区间小) , 可靠程度也高 ($1-\alpha$ 大) . 如果不降低可靠性, 而要缩小估计范围, 则必须增大样本容量, 增加抽样成本.

作业

1. 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间 (单位：h) 分别为 6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0. 设干燥时间 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. 在下面两种情况下：$\sigma = 0.6$(h); σ 未知，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
2. 有一大批糖果. 现从中随机地取 16 袋，称得重量 (以克计) 如下：

   $$506,\ 508,\ 499,\ 503,\ 504,\ 510,\ 497,\ 512,\ 514,\ 505,\ 493,\ 496,\ 506,\ 502,\ 509,\ 496.$$

   设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求：
   (1) 总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
   (2) 总体标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
3. 为比较 I,II 两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取 I 型子弹 10 发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500$(m/s)，方差 $s_1^2 = 1.10$(m/s)，随机地取 II 型子弹 20 发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_2 = 496$(m/s)，方差 $s_2^2 = 1.20$(m/s). 假设两总体都可认为近似地服从正态分布. 且生产过程可认为方差相等. 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.
4. 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机地抽取机器 A 生产的钢管 18 只，测得样本方差 $s_1^2 = 0.34(\mathrm{mm}^2)$，随机地取机器 B 生产的钢管 13 只，测得样本方差 $s_2^2 = 0.29(\mathrm{mm}^2)$. 设两样本相互独立，且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径分别服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$，这里 μ_i, σ_i^2，$i = 1, 2$，均未知. 试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 0.90 的置信区间.